

**О. В. Зверев, В. М. Хаметов** (Москва, МГИЭМ). **Об условиях справедливости опционального разложения.**

1. Опциональное разложение супермартиנגалов широко используется в теории оптимального управления случайными процессами и в финансовой математике [1], [2]. В докладе приводятся новые условия, обеспечивающие справедливость этого разложения.

2. Пусть на стохастическом базисе  $(\Omega, \mathcal{F}, (F_t)_{t \in N_0}, P)$ , где  $N_0 \triangleq \{0, 1, 2, \dots, N\} \in \mathbb{Z}^+$ , задана  $d$ -мерная ( $d < \infty$ ) согласованная случайная последовательность, обозначаемая  $\{S_t, F_t\}_{t \in N_0}$ . Положим, что: i) вероятностная мера  $P$  фиксированна; ii) для любого  $t \in N_0$ :  $F_t = F_t^S \triangleq \sigma(S_u, u \leq t)$ . Обозначим  $\Delta S_t \triangleq S_t - S_{t-1}$ ,  $S_\bullet \triangleq (S_0, S_1, \dots, S_N)$ . Пусть  $f_N(S_\bullet)$  — любая  $F_N^S$ -измеримая ограниченная случайная величина. Пусть на фильтрованном измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, (F_t^S)_{t \in N_0})$  задана также вероятностная мера  $Q$ , эквивалентная мере  $P$ . Множество мер  $Q$ , эквивалентных  $P$ , обозначим  $\mathfrak{R}_N$ . Везде ниже предполагается, что  $\mathfrak{R}_N \neq \emptyset$ . Множество мер  $Q \in \mathfrak{R}_N$ , относительно которых последовательность  $\{S_t, F_t\}_{t \in N_0}$  является локальным мартиנגалом, обозначим  $\varphi_N$ ;  $\gamma_1^N \triangleq \{\gamma_t\}_{t \in N_1}$ ,  $N_1 \triangleq \{1, 2, \dots, N\}$ , обозначим  $d$ -мерную  $F^S$ -предсказуемую последовательность, которую назовем стратегией. Множество стратегий обозначим  $U_1^N$ . Пусть  $D_1^N$  — любое подмножество  $U_1^N$ , а  $D_{t_1}^{t_2}$ , где  $t_1, t_2 \in N_1$  и  $t_2 \geq t_1$  — сужение множества  $D_1^N$  на  $\{t_1, \dots, t_2\} \subseteq N_1$ , и для него используем обозначение  $\gamma_{t_1}^{t_2} \in D_{t_1}^{t_2}$ . Пару  $(Q, \gamma_{t+1}^N) \in \mathfrak{R}_N \times U_{t+1}^N$  назовем бистратегией в момент времени  $t \in N_1$ . Оценкой бистратегии  $(Q, \gamma_{t+1}^N)$  в момент времени  $t \in N_0$  назовем  $F_t^S$ -измеримую случайную величину, обозначаемую  $I_t^{Q, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$  и определяемую равенством

$$I_t^{Q, \gamma_{t+1}^N} \triangleq M^Q \left[ \exp \left\{ f_N(S_\bullet) - \sum_{i=t+1}^N (\gamma_i, \Delta S_i) \right\} \middle| F_t^S \right],$$

где  $(\bullet, \bullet)$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^d$ ,  $M^Q(\bullet | F_t^S)$  — условное математическое ожидание относительно  $\sigma$ -алгебры  $F_t^S$ . Стратегию  $\gamma_1^N$  назовем допустимой, если для любого  $t \in N_1$   $P$ -п.н.  $\text{ess sup}_{Q \in \mathfrak{R}_N} G_Q(t, S_0^{t-1}, -\gamma) < \infty$ , где  $G_Q(t, S_0^{t-1}, -\gamma) \triangleq \ln M^Q[\exp\{-(\gamma, \Delta S_t)\} | F_{t-1}^S]$ , которую называют кумулянтной последовательности  $\{S_t, F_t\}_{t \in N_0}$  относительно меры  $Q \in \mathfrak{R}_N$  [1]. Множество допустимых стратегий обозначим  $\overline{D}_1^N$ .

3. Вспомогательные результаты.  $F_t^S$ -измеримую случайную величину  $\overline{V}_t$ , определяемую равенством

$$\overline{V}_t \triangleq \text{ess inf}_{\gamma_{t+1}^N \in \overline{D}_{t+1}^N} \text{ess sup}_{Q \in \mathfrak{R}_N} I_t^{Q, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$$

назовем верхним гарантированным значением в момент времени  $t \in N_0$ .

**Теорема 1.** Пусть фильтрация  $\{F_t^S\}_{t \in N_0}$  универсально полна. Тогда  $\{\overline{V}_t, F_t^S\}_{t \in N_0}$   $P$ -п.н. удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\overline{V}_t = \text{ess inf}_{\gamma_{t+1}^S \in \overline{D}_{t+1}^S} \text{ess sup}_{Q \in \mathfrak{R}_N} M_Q[\overline{V}_{t+1} e^{-(\gamma, \Delta S_{t+1})} | F_t^S], \quad \overline{V}_t |_{t=N} = e^{f_N(S_\bullet)}. \quad (1)$$

Сформулируем условие, выполнение которого обеспечивает достижение внешней существенной нижней грани в рекуррентном соотношении (1).

**Условие  $(\gamma)$ .** Существуют такие мера  $Q^\wedge \in \mathfrak{R}_N$  и константа  $c_1 > 0$ , что для любого  $t \in N_1$ :  $\text{ess inf}_{\gamma \in \overline{D}_t} e^{G_Q(t, S_0^{t-1}, -\gamma)} \geq c_1$   $P$ -п.н.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1 и выполнено условие  $(\gamma)$ . Тогда существует такая стратегия  $\{\gamma_t^*\}_{t \in N_1} \in \overline{D}_1^N$ , что для любого  $t \in N_1$  спра-

ведливы равенства P-п. н.

$$\begin{aligned} \bar{V}_t &= \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in \bar{D}_{t+1}} \operatorname{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{R}_N} M_Q[\bar{V}_{t+1} e^{-(\gamma, \Delta S_{t+1})} | F_t^S] \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{R}_N} M^Q[\bar{V}_{t+1} e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} | F_t^S] |_{\gamma_{t+1} = \gamma_{t+1}^*}. \end{aligned} \quad (2)$$

Кроме того, для любых  $t \in N_1$  и  $Q \in \mathfrak{R}_N$  справедливо неравенство

$$\bar{V}_{t-1} \geq M^Q[\bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | F_{t-1}^S] \quad Q(P)\text{-п. н.}$$

4. Основной результат.

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда существует возрастающая последовательность  $\{C_t^*, F_t^S\}_{t \in N_0}$ , определяемая равенством

$$\Delta C_t^* \triangleq (\gamma_t^*, \Delta S_t) - \Delta \ln \bar{V}_t \geq 0 \quad P\text{-п. н.,} \quad C_t^* |_{t=0} = 0,$$

где  $\{\gamma_t^*, F_{t-1}^S\}_{t \in N_1}$  — предсказуемая последовательность, определяемая равенством (2), а  $\{\bar{V}_t, F_t^S\}_{t \in N_0}$  удовлетворяет рекуррентному соотношению (1), при этом относительно любой меры  $Q \in \mathfrak{R}_N$

$$f_N(S_*) = \ln \bar{V}_0 + \sum_{i=1}^N (\gamma_i^*, \Delta S_i) - C_N^* \quad Q\text{-п. н.} \quad (3)$$

**З а м е ч а н и е.** 1) Отметим, что если  $\mathfrak{R}_N = \emptyset_N$ , то разложение (3) и опциональное разложение [1], [2] совпадают.

2) Разложение (3) отличается от установленного в [1], [2] опционального разложения тем, что последовательность  $\{S_t, F_t^S\}_{t \in N_0}$  относительно любой меры  $Q \in \mathfrak{R}_N \setminus \emptyset_N$  не является локальным мартингалом.

3) Разложение (3) позволяет рассчитывать европейский опцион на неполном рынке при наличии арбитражной ситуации.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 2. Теория. М.: Фазис, 1998, 544 с.
2. Фельмер Г., Шид А. Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.: МЦНМО, 2008, 496 с.

**Т. А. З у б а й р а е в** (Москва, МГУ). Оценка функций концентрации в асимптотическом анализе U-статистик.

Пусть  $X, \bar{X}, X_1, X_2, \dots, X_N$  — одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения в произвольном измеримом пространстве  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ . Пусть  $\phi_1: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbf{R}$  и  $\phi: \mathfrak{X}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  — измеримые функции, принимающие вещественные значения. Предположим, что  $\phi$  симметрична, т. е.  $\phi(x, y) = \phi(y, x)$ , для любых  $x, y \in \mathfrak{X}$  и  $q_i$  —  $i$ -е по порядку собственное значение оператора. Предположим, что

$$\mathbf{E} \phi_1(X) = 0, \quad \mathbf{E} \phi(x, X) = 0, \quad \text{для всех } x \in \mathfrak{X}, \quad \mathbf{E} \phi(x, X) < \infty, \quad \mathbf{E} \phi_1^2(X) < \infty.$$

Рассмотрим функцию концентрации U-статистики  $T_*$

$$Q(T_*; \lambda) = \sup_x \mathbf{P} \{x \leq T_* \leq x + \lambda\}, \quad \lambda \geq 0,$$

$$T_* = \sum_{1 \leq i < k \leq N} \phi(X_j, X_k) + f_1(X_1, \dots, X_M) + f_2(X_{M+1}, \dots, X_N), \quad 1 \leq M \leq N/2,$$

где  $f_1 = f_1(X_1, \dots, X_M)$ ,  $f_2 = f_2(X_{M+1}, \dots, X_N)$  — зависящая от  $X_1, \dots, X_M$  и  $X_{M+1}, \dots, X_N$  соответственно.

**Теорема.**

**З а м е ч а н и е.** Götze [1] с оценкой  $\exp\{c'/|q_9|\}$ . Оценки условий не в Gotze [2].

1. Bentkus V., tics. — Ann
2. Ulyanov V., spaces. Univ
3. Bogatyrev S. expansions in 2006, v. 97,

**А. С. И в :** делирование т Неоднородн и изгибающих т конструкции р ного примера до нии изделий мет лирование темп заключается в и для пластины и : Температур решения бигарм

$\Delta \Delta w$

где  $w$  — прогиб ны. Величина  $l$  коэффициент ли  $T(x, y, z, t)$  — те образом:  $D = E l$

При известн пературный про задачи в общем Поэтому исполь: пластины идент матически форм

$\Delta \Delta$

ТОМ

16

Выпуск

6

# ОБОЗРЕНИЕ ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

В выпуске:

Секция «Финансовая и страховая математика»

1 – 8

X

•

2009

ДЕСЯТЫЙ ВСЕРОССИЙСКИЙ СИМПОЗИУМ  
*ПО ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ*

*Осенняя сессия.*

*НАУЧНЫЕ ДОКЛАДЫ. ЧАСТЬ II*

Редакция журнала «ОПиПМ» • МОСКВА  
2009

ДЕСЯТЫЙ  
ВСЕРОССИЙСКИЙ СИМПОЗИУМ  
ПО ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ  
МАТЕМАТИКЕ

(осенняя открытая сессия, 1 – 8 октября 2009 г.)

СОДЕРЖАНИЕ

и\*  
дела  
математике\*

информатика»,  
(ТВП)»  
иверситета

Григорян,  
Куржанский,  
Шорин,  
В. Русанов,  
Н. Ширяев,  
О. Н. Медведева,  
Я. Шоргин.

дела  
математики»,

И. Астафьев,  
Мазадов,

арь),  
А. Шуляк

симпозиумов)

дная дискретная математи-  
аботка и защита информа-

и поддержки принятия ре-  
ля регионального управ-

огия. Психология  
ьные функции и ортого-  
: многочлены  
нейро-, биокомпьютеры,  
онные и мембранные вы-  
я  
управления и системные ис-  
ния. Процессы принятия ре-

и массоперенос  
океана и атмосферы  
лы и масштабный эффект  
ика, страховая и финансовая  
ика  
ика и передача энергии  
уденция. Криминалистика.

<i>Абакумов А. И., Решетняк Т. М.</i> Задачи оптимального распределения квот на примере промыслов в Приморье и Прикамчатских водах . . . . .	1015
<i>Абуталипова Л. Н., Богомолов В. А., Плотников С. П., Плотников Д. С., Елисеенков В. В.</i> Модифицированные проницаемости, основанные на модели схемы струй для различных законов распределения . . . . .	1016
<i>Аглямова З. Ш., Галимова З. Х.</i> Факторный анализ рентабельности одного из предприятий г. Набережные Челны . . . . .	1016
<i>Арбузов В. А.</i> О линеаризации решающего правила в задаче поиска векторов, не принадлежащих заданному подмножеству . . . . .	1017
<i>Артипов В. П., Верзилина О. А.</i> Расчет температурного режима в системе тел с учетом взаимного теплообмена излучением . . . . .	1018
<i>Афанасьева Т. В., Валеев С. Г., Козлов А. О.</i> Моделирование временных рядов в терминах нечетких тенденций . . . . .	1019
<i>Бажанова Т. В.</i> Стохастическая модель компромиссного влияния свободных радикалов на процесс старения . . . . .	1020
<i>Балакин Г. В.</i> О возможности решения системы уравнений сдвигового типа . . . . .	1021
<i>Белкина Т. А., Конюхова Н. Б.</i> О вероятности разорения в модели страхования с учетом инвестирования . . . . .	1022
<i>Береза С. А.</i> Институциональный подход к численным экспериментам моделирования поведения субъектов рынка . . . . .	1024
<i>Богданов В. В., Богданов А. Ю.</i> Модели динамики шлифовального круга: от порядка к хаосу . . . . .	1025
<i>Богонатов Р. В.</i> Ранг суммы двух рекуррент максимального периода над $Z_2^n$ . . . . .	1027
<i>Болодурина И. П., Луговская Ю. П.</i> Стохастическая модель инфекционных заболеваний, основанных на принципах функционирования иммунной системы . . . . .	1028
<i>Бородин Т. С., Тихов М. С.</i> Оценки максимального правдоподобия в моделях пропорциональных и непропорциональных рисков при случайном цензурировании . . . . .	1029
<i>Ботвин Г. А., Забоев М. В.</i> Фактор сезонности в анализе экономических данных . . . . .	1031
<i>Ботвин Г. А., Петтай П. П.</i> Интеллектуальные методы анализа данных . . . . .	1032
<i>Бурнаев Е. В.</i> О детерминированном методе второго порядка обнаружения разладки в минимальной задаче для броуновского движения . . . . .	1033
<i>Бурнаев Е. В.</i> Оценка точности в задаче аппроксимации многомерной зависимости . . . . .	1034
<i>Бурнаев Е. В., Беляев М. Г., Свириденко Ю. Н., Чернова С. С.</i> О методах построения консолидированных данных . . . . .	1035
<i>Вавилов В. А.</i> Математическая модель сетей случайного доступа, функционирующих в РН-среде . . . . .	1036
<i>Валеев С. Г., Кувайскова Ю. Е.</i> Программное обеспечение обработки временных рядов техногенных характеристик . . . . .	1037
<i>Валеев С. Г., Фасхутдинова В. А.</i> Пакет программ для моделирования динамики сейсмической активности . . . . .	1038
<i>Валуйская С. А., Кармазин В. Н.</i> Сравнение инвестиционных проектов в условиях интервальной неопределенности . . . . .	1039
<i>Войтиков К. Ю., Моисеев А. Н.</i> Общие вопросы архитектуры объектно-ориентированной распределенной системы моделирования процессов массового обслуживания . . . . .	1040
<i>Волосатов С. Л., Волосатова Т. А., Данекянц А. Г.</i> Новые способы крепления трубопроводов в помещениях малой площади . . . . .	1041
<i>Волосова А. К., Волосов К. А.</i> СЛАУ вместо уравнения с частными производными . . . . .	1042

<i>Воронин А. С., Медведева Н. Б.</i> Устойчивость монодромных особых точек плоских динамических систем с фиксированной диаграммой Ньютона . . . . .	1043
<i>Высотина В. Г.</i> Расчет течения воздуха в плоском канале . . . . .	1044
<i>Вьюненко Л. Ф.</i> Особенности применения квазивероятностных методов в экономических расчетах . . . . .	1046
<i>Гарайшина И. Р.</i> Исследование двухфазной системы массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов и произвольным распределением времени обслуживания . . . . .	1047
<i>Гольдштейн Е. И., Кац И. М.</i> Функциональный контроль линий электропередач по массивам мгновенных значений токов и напряжений . . . . .	1048
<i>Гонова М. С., Тлисов А. Б., Морозова Н. В.</i> Решение задачи прогнозирования временных рядов общей таможенной стоимости с помощью нейронных сетей . . . . .	1049
<i>Горбатков С. А., Фаргиева С. А., Коротнева М. В., Чапкович А. А.</i> Метод вложенных математических моделей для регуляризации нейросетевых задач финансового контроля . . . . .	1050
<i>Горелов Ю. Н., Горелова О. И., Данилов С. Б.</i> К решению задачи оптимального управления сканированием маршрутов съемки при дистанционном зондировании Земли из космоса . . . . .	1051
<i>Горшков С. П.</i> Уточнение числа биконъюнктивных функций . . . . .	1053
<i>Грacheв И. Д.</i> Рынок как естественная статистическая машина . . . . .	1053
<i>Грacheв И. Д., Пономарева М. В.</i> Статистическая перераспределительная модель динамики смешанных экономических систем . . . . .	1055
<i>Гуримская И. А.</i> О решении краевых задач для дивергентного уравнения в полуплоскости . . . . .	1055
<i>Гущин А. А.</i> Одна лемма из теории пространств Орлича . . . . .	1056
<i>Денисова Е. В., Насибуллаева Э. Ш.</i> Силы внутреннего взаимодействия между подвижными элементами в гидромеханических агрегатах дозирования топлива . . . . .	1058
<i>Думачев В. Н.</i> О векторных лагранжианах . . . . .	1059
<i>Жарков А. В.</i> Реализация криптографического протокола электронного голосования . . . . .	1059
<i>Жарков И. А.</i> Автоматическая система решения геометрических задач . . . . .	1060
<i>Жаркова Г. А.</i> Использование нестатистического факторного анализа в задаче определения различий в структуре интеллекта школьников . . . . .	1061
<i>Жигалко Е. Ф., Папчужева М. Ю.</i> О регуляризации пространства инвариантов . . . . .	1062
<i>Жигалко Е. Ф., Покутник О. А.</i> Метод малого параметра в одной задаче о нелинейном осцилляторе . . . . .	1064
<i>Захарова О. В.</i> Первая краевая задача для одного класса стохастических волновых уравнений . . . . .	1066
<i>Зверев О. В., Хаметов В. М.</i> Об условиях справедливости опционального размещения . . . . .	1067
<i>Зубайраев Т. А.</i> Оценка функций концентрации в асимптотическом анализе $U$ -статистик . . . . .	1068
<i>Иванов А. С., Миронова Л. И.</i> Моделирование температурного изгиба пластины . . . . .	1069
<i>Иванов М. С., Виноградов И. С.</i> Теоретическая разработка методов снижения виброактивности различных технических систем . . . . .	1070
<i>Ивашко Е. Е., Фалько А. А.</i> Модель ТВ-игры "The Price is Right" с несколькими участниками . . . . .	1071
<i>Ильменская Е. М.</i> Информационно-аналитическая система экспертизы результатов научной деятельности . . . . .	1071
<i>Калитвин В. А.</i> Комбинированный метод приближенного решения уравнений Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами . . . . .	1072
<i>Киселев В. В.</i> Использование $\Lambda$ -оптимальных решений для решения задач оптимального управления . . . . .	1073
<i>Кляшторная О. В., Шелемет Е. А.</i> Анализ применимости методики VaR для оценки риска российских вторичных ценных бумаг . . . . .	1074
<i>Кожеманова Т. Н., Галимова З. Х.</i> Особенности формирования и распределения прибыли предприятия-монополиста в условиях финансового кризиса . . . . .	1075
<i>Колодзей А. В.</i> О коротких циклах одного нелинейного преобразования . . . . .	1076
<i>Коломыцева Е. А.</i> ARG-деформации поверхностей в римановом пространстве . . . . .	1077
<i>Коноплева Л. П.</i> Роль практических приложений в обучении математической логике . . . . .	1078

<i>Копытцев В. А., Мил</i>	типа для числа $\zeta$
<i>Корнищева О. В.</i> Мет	
<i>Корниченко С. А.</i> По	стем радиоконтр
<i>Корников В. В.</i> Мно	чия . . . . .
<i>Костикова Е. К.</i> Чи	граничными усл
<i>Красильникова Е. В.</i>	тативности комп
<i>Крепс В. Л.</i> Модель	
<i>Кривай А. Ю.</i> Услови	ности с неизвест
<i>Крушинов А. П., Берн</i>	н знаний в метал
<i>Кувшинов С. В., Язы</i>	в стадии охлажд
<i>Кукьянов Г. Л.</i> Сравн	неоднородностей
<i>Лавин О. О.</i> О ско	распределению $J$
<i>Максимов А. В., Ча</i>	кин М. В. Спос
<i>Максимов А. В., Чав</i>	пользованием П.
<i>Максимов А. В., Чав</i>	систем автомати
<i>Маркин А. В.</i> Состо	коэффициентов .
<i>Мудрецова А. В.</i> Мо	финансирования
<i>Мухоморова А. П., Мул</i>	тической систем
<i>Мухоморова Е. Ю.</i> Гло	колебаниях обоб
<i>Мухоморова Е. Ю.</i> Гло	ложения . . . . .
<i>Назаров А. А., Носо</i>	сов как автоном
<i>Назаров Е. И., Кел</i>	управления для
<i>Николаев М. Л., Сог</i>	кратного наилуч
<i>Никонова А. А.</i> Мет	котехнологичног
<i>Никонова О. М., Арт</i>	региональной м
<i>Никонова О. М., Арт</i>	ния . . . . .
<i>Никонов А. В.</i> Эконом	шений между ко
<i>Никонова А. В., Рубц</i>	задач в слоисты
<i>Никонова Ю. И.</i> О	циальных уравн
<i>Никонов Е. С.</i> О	ноты информаци
<i>Никонова Э. В.</i> П	районе России л
<i>Никонов С. П.,</i>	модели прогноза
<i>Никонов В. В.</i> Модис	ного заводнения
<i>Никонов В. В.</i> Модис	ными пронидаем
<i>Никонов Э. Л.</i> Сведе	номерной . . . . .
<i>Никонова А. Н.</i> Ме	сурсами . . . . .